Считающая мера и дискретная плотность

Для того, чтобы вся рассматриваемая теория работала как в непрерывном, так и в дискретном случае, введем понятие плотности дискретного распределения. Пусть $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}$ — не более чем счетное множество и $\mathscr{B}_{\mathscr{X}}$ — сигма-алгебра на $\mathscr{X}$. Введем ряд понятий

1. *Считающей мерой* на $\mathscr{X}$ называется функция $\mu\colon \mathscr{B}_{\mathscr{X}} \to \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, определенная по правилу $\mu(B) = \sum\limits_{k\in\mathscr{X}} I\{k \in B\}$ для $B \in \mathscr{B}_{\mathscr{X}}$, т.е. количество точек из $\mathscr{X}$ в множестве B;
2. Интеграл функции f по мере μ определяется как $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) = \sum\limits_{k\in B\cap\mathscr{X}} f(k)$, если ряд в правой части сходится абсолютно;
3. Если ξ — случайная величина со значениями из $\mathscr{X}$, то ее *дискретной плотностью* будем называть $p(x) = \mathsf{P}(\xi = x),\ x \in \mathscr{X}$;
4. Если $\mathsf{E}g(\xi)$ конечно, то справедлива формула $\mathsf{E}g(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)p(x)\mu(dx)$.

Таким образом имеет место полная аналогия с непрерывным случаем. Семейство распределений $\mathscr{P}$ будем называть *доминируемым*, если все распределения в нем непрерывны либо все дискретны. В дальнейшем для простоты вместо $\mu(dx)$ будем писать dx.

Условия регулярности

$X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из неизвестного распределения $\mathsf{P}_\theta \in \mathscr{P}$,
где $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ — доминируемое семейство с плотностью $p_\theta(x)$.

E1. Θ — открытый интервал в $\mathbb{R}$ (возможно, бесконечный);

E2. Носитель плотности $\{x \in \mathbb{R} \mid p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ;

E3. Для любой статистики $S(X)$ с конечным вторым моментом выполнено свойство дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int\limits_{\mathscr{X}} S(x)p_\theta(x)dx = \int\limits_{\mathscr{X}} S(x)\frac{\partial}{\partial\theta}p_\theta(x)dx.$$

E4. Для любого θ величина $\mathsf{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p_\theta(X)\right)^2$ конечна и положительна.

Условия регулярности

L1. Семейство $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ является доминируемым с плотностью $p_\theta(x)$,
причем $\mathsf{P}_{\theta_1} \neq \mathsf{P}_{\theta_2}$, если $\theta_1 \neq \theta_2$;

L2. Носитель плотности $A = \{x \in \mathbb{R} \mid p_\theta(x) > 0\}$ не зависит от θ;

L3. $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из неизвестного распределения $\mathsf{P} \in \mathscr{P}$;

L4. Θ — открытый интервал в $\mathbb{R}$ (возможно, бесконечный);

L5. Плотность $p_\theta(x)$ дифферецируема по θ для любого $x \in A$;

L6. Плотность $p_\theta(x)$ трижды непрерывно дифферецируема по θ для любого $x \in A$;

L7. Интеграл $\int\limits_A p_\theta(x)dx$ трижды дифферецируем по θ;

L8. $i(\theta) = \mathsf{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p_\theta(X_1)\right)^2 \in (0, +\infty)$ — информация Фишера одного наблюдения;

L9. $\forall\theta_0 \in \Theta\ \exists c > 0\ \exists H(x)\ \forall\theta \in (\theta_0 - c, \theta_0 + c) :\ \left|\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\ln p_\theta(x)\right| < H(x)$ и $\mathsf{E}_\theta H(X_1) < +\infty$.