Статистика, прикладной поток.

Гипотезы и критерии

Рассмотрим некоторый *пример* — исследование влияния некоторого нового препарата на заболевание. Для проведения исследования испытуемые случайно разделяются на две независимые группы, в одной из которых применяют новый препарат, а в другой — плацебо. По прошествии курса сравнивается эффект в группах. Рассмотрим две гипотезы:

Основная гипотеза: эффект в обоих группах одинаковый.

Альтернативная гипотеза: лекарство положительно влияет на выздоровление.

Если в результате проведения эксперимента мы получим, что в первой группе доля выздоровевших сильно больше, чем во второй группе, то основную гипотезу следует отклонить в пользу справедливости альтернативной гипотезы.

Перейдем к формальному определению статистических гипотез. Пусть $\mathscr{X}$ — выборочное пространство и $\mathscr{P}$ — некоторое семейство распределений на $\mathscr{X}$. Рассмотрим высказывания вида

$$\mathsf{H}_0\colon\ \mathsf{P} \in \mathscr{P}_0 \text{ — основная (нулевая) гипотеза;}$$
$$\mathsf{H}_1\colon\ \mathsf{P} \in \mathscr{P}_1 \text{ — альтернативная гипотеза,}$$

где $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}$ и $\mathscr{P}_0 \cap \mathscr{P}_1 = \emptyset$. Причем если H_1 не задана явно, будем считать, что $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}_0$. В параметрическом подходе если $\mathscr{P} = \{\mathsf{P}_\theta \mid \theta \in \Theta\}$, гипотезы могут быть записаны в виде

$$\mathsf{H}_0\colon \theta \in \Theta_0;$$
$$\mathsf{H}_1\colon \theta \in \Theta_1,$$

где $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ и $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Гипотеза вида $\theta = \theta_0$ называется *простой*, иначе — *сложной*.

Замечание. Не обязательно должно быть выполнено $\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1 = \mathscr{P}$ или $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$. Например, могут быть рассмотрены гипотезы $\mathsf{H}_0\colon \theta = \theta_0$ *vs.* $\mathsf{H}_1\colon \theta > \theta_0$. Естественно, истинное значение параметра θ на самом деле может быть меньше θ_0.

Альтернативную гипотезу часто называют в соответствии с ее типом:

- $\mathsf{H}_1\colon \theta > \theta_0$ — правосторонняя альтернатива;
- $\mathsf{H}_1\colon \theta < \theta_0$ — левосторонняя альтернатива;
- $\mathsf{H}_1\colon \theta \neq \theta_0$ — двусторонняя альтернатива;

Примеры гипотез.

1. Пусть $\mathscr{P}$ — все непрерывные распределения на $\mathbb{R}$. Можно поставить гипотезу о принадлежности неизвестного распределения какому-либо параметрическому семейству:
   $\mathsf{H}_0\colon\ \mathsf{P} \in \{\mathcal{N}(a, \sigma^2) \mid a \in \mathbb{R}, \sigma > 0\}$
   $\mathsf{H}_1\colon\ \mathsf{P} \in \{Exp(\theta) \mid \theta > 0\}$

2. Пусть $\mathscr{P} = \{\mathcal{N}(\theta, 1) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ — семейство нормальных распределений. Иногда на практике интересует не конкретное значение параметра, а лишь факт того, что оно не меньше некоторого порогового значения. В таком случае можно проверить следующие гипотезы:
   $\mathsf{H}_0\colon \theta \geqslant 0$
   $\mathsf{H}_1\colon \theta < 0$

Пусть $\mathscr{X}$ — выборочное пространство и $X = (X_1, ..., X_n)$ — выборка из неизвестного распределения $\mathsf{P} \in \mathscr{P}$. Тогда множество $S \subset \mathscr{X}$ называется *критерием* для проверки H_0 *vs.* H_1, если правило отвержения H_0 выглядит следующим образом

$$\mathsf{H}_0 \text{ отвергается } \iff X \in S.$$

Зачастую критерий S имеет вид $S = \{x \in \mathscr{X} \mid T(x) \geqslant c\}$. В таком случае H_0 отвергается $\iff$ $T(X) \geqslant c$, а число c называется критическим уровнем. Кроме того, если t_1 и t_2 — два возможных значения статистики $T(X)$, то t_1 считается *более экстремальным*, чем t_2, если $t_1 > t_2$.

В параметрическом подходе критерий называется *двусторонним*, если гипотезы имеют вид $\mathsf{H}_0 \colon \theta = \theta_0$ *vs.* $\mathsf{H}_1 \colon \theta \neq \theta_1$, и *односторонним* в случаях $\mathsf{H}_0 \colon \theta = \theta_0$ *vs.* $\mathsf{H}_1 \colon \theta > \theta_1$ и $\mathsf{H}_0 \colon \theta = \theta_0$ *vs.* $\mathsf{H}_1 \colon \theta < \theta_1$.

При тестировании гипотез может быть два результата:

1. $X \in S \Longrightarrow \mathsf{H}_0$ отвергается.
   Результат проверки гипотез является *статистически значимым.*

2. $X \notin S \Longrightarrow \mathsf{H}_0$ не отвергается.
   Результат проверки гипотез является *статистически не значимым.*
   Внимание! Неправильно говорить "H_0 принимается" — отсутствие доказательств несправедливости H_0 не есть доказательство ее справедливости.

Что означает "проверить гипотезу $\mathsf{H}_0 \colon \mathsf{P} \in \mathscr{P}_0$"? Распределение, вообще говоря, является бесконечномерным объектом, в то время как мы имеем лишь конечную выборку, нередко еще и достаточно малого размера. Мы можем проверить, например, что первые 100 выборочных моментов принимают значения, типичные для распределений из $\mathscr{P}_0$. Если найдем существенную разницу, может утверждать о том, что H_0 не верна. В противном случае мы ничего утверждать не можем — разница могла быть в 101-м моменте.

Рассмотрим, например, проверку нормальности выборки. Математическое ожидание и дисперсия могут принимать произвольные значения, а все последующие моменты выражаются через них. За третий момент отвечает коэффициент асимметрии, который равен нулю для нормального распределения. Можно проверить, что оценка коэффициента асимметрии близка к нулю (в частности для этого требуется построение доверительного интервала для него). Если это будет не верно, то стоит отклонить гипотезу о нормальности — мы смогли статистически доказать несимметричность. В противном случае ничего утверждать нельзя, поскольку не только нормальные распределения симметричны. Далее для проверки стоит рассмотреть коэффициент эксцесса.

Процедура проверки гипотез во многом похожа на презумпцию невиновности — обвиняемый считается невиновным до тех пор, пока его вина в совершенном преступлении не будет доказана в установленном законом порядке. Аналогично, мы подразумеваем справедливость H_0 до тех пор, пока улики не будут указывать против H_0. Приведем таблицу соответствия терминов презумпции невиновности и процедуры проверки гипотез

Обвиняемый	P — неизвестное распределение
Невиновность	$\mathsf{P} \in \mathscr{P}_0$ — основная гипотеза
Виновность	$\mathsf{P} \in \mathscr{P}_1$ — альтернативная гипотеза
Совершенные действия	X — выборка
Факты, улики	$T(X)$ — статистика критерия
Доказательство	Справедливость утверждения $X \in S$

Внимание! Зачастую на практике применяют процедуру проверки гипотез даже если это не целесообразно, и было бы более оптимальным рассматривать доверительные интервалы. Проверку гипотез стоит применять только в том случае, если требуется проверить определенную гипотезу.