

Введение в АД





О курсе



Команда Физтех.Статистики





Проводимые нами учебные курсы

- ▶ Введение в анализ данных;
- ▶ DS-поток;
- ▶ Phystech@DataScience (в т.ч. мат. статистика на ЛФИ);
- ▶ Мат. статистика на ФБМФ и ФМХФ (семинары);
- ▶ Два курса в магистратуре кафедры X5 Group;
- ▶ Машинное обучение в ШАД (частично);



Организационная информация

Telegram-бот

@miptstats_ds22_bot



Сайт команды mipt-stats.gitlab.io

Почта mipt.stats@yandex.ru

Кафедра дискретной математики



Цели курса

1. Дать представление об анализе данных;
2. Обучить базовым инструментам анализа данных;
3. Рассказать о практическом смысле объектов теории вероятностей;
4. Помочь определиться с кафедрой.

Яндекс

В курсе предполагается участие кафедры анализа данных:

- ▶ Гостевые лекции от Яндекса;
- ▶ Работа по курсу учитывается при отборе на кафедру.



План занятий первой части (обязательная)

Дата	Тема	Лектор	Дедлайн по ДЗ
5.02	<i>Введение, инструменты</i>	 Никита Волков	25.02
12.02	<i>Сбор данных. Модели данных</i>	 Роман Логинов	25.02
19.02	<i>Самостоятельная работа</i>		
26.02	<i>Теория вероятностей на практике</i>	 Екатерина Юшина	11.03
05.03	<i>Линейная регрессия</i>	 Никита Волков	18.03
12.03	<i>Гостевая лекция</i>		



План занятий второй части (факультативная)

Дата	Тема	Лектор	Дедлайн по ДЗ
19.03	<i>Решающие деревья, случайные леса</i>	 Никита Волков	29.03
26.03	<i>Основы статистики. Свойства оценок.</i>	 Никита Волков	5.04
2.04	<i>Где-то тут контрольная на кафедру АД (инф. позже)</i>		
9.04	<i>Байесовские классификаторы</i>	 Никита Волков	19.04
16.04	<i>Введение в нейросети</i>	 Виталия Жихарева	26.04
23.04	<i>Гостевая лекция</i>		



Система оценивания первой части

Правила:

1. если $L > 25\%$ и ($B < 50\%$ или $C < 20\%$),
то $O = 3 + 4 * L$;
2. если $L > 25\%$ и $B \geq 50\%$ и $C \geq 20\%$,
то $O = \max(3 + 4 * L, 3 + B + 7 * LC)$.
3. если $L \leq 25\%$,
то $O = 1 + 3 * T$.

Обозначения:

- ▶ L — доля выполнения легких заданий (их немного);
- ▶ C — доля выполнения сложных заданий (их много);
- ▶ T — доля выполнения тестов;
- ▶ LC — доля выполнения всех заданий (кроме тестов);
- ▶ B — доля правильных ответов на вопросы в боте на занятии;
- ▶ O — итоговая оценка, округляется вверх.



Система оценивания первой части

Правила:

1. если $Л > 25\%$ и ($В < 50\%$ или $С < 20\%$),
то $O = 3 + 4 * Л$;
2. если $Л > 25\%$ и $В \geq 50\%$ и $С \geq 20\%$,
то $O = \max(3 + 4 * Л, 3 + В + 7 * ЛС)$.
3. если $Л \leq 25\%$,
то $O = 1 + 3 * Т$.

Следствия: для получения оценки

- ▶ уд(3) достаточно выполнить 33.4% тестов.
- ▶ хор(5) достаточно выполнить 25.1% легких заданий.
- ▶ отл(8) достаточно выполнить 50.1% всех заданий и ответить на 50% вопросов.

Если списать: все участники списывания сдают устный зачет.



DS-поток



DS-поток

Семестр	DS-поток	Основной поток ПМИ
5	Математическая статистика	Математическая статистика
	Машинное обучение	Машинное обучение
	Практика	Практика по мат. статистике
	Основы прикладной статистики	Курс по выбору x 2
	Курс по выбору	
6	Дискр. случ. процессы и временные ряды	Случайные процессы
	Прикладная статистика и анализ данных	Курс по выбору x 3
	Практика	
	Курс по выбору	
Кафедра АД	Курс ШАД	Методы прикладной статистики
7	Байесовский подход в анализе данных	Курс по выбору x 2
	Практика	
8	Прикладные задачи машинного обучения	Курс по выбору x 2
	Практика	

Примечания.

1. По одним и тем же курсам лекторы разные.
2. По факту практика не является отдельным курсов.
3. Полужирным выделены курсы, по которым экзамен.
4. В процессе обучения перейти в DS-поток невозможно.



DS-поток

Чему мы учим

1. В меру глубокое математическое понимание статистики и машинного обучения.
2. Применение математических моделей на реальных данных, в том числе на реальных задачах.
3. Умение составлять полноценные выводы.

Реальная практика на DS-потоке

1. Реальные примеры из практики;
2. Соревнования на Kaggle;
3. Гостевые лекторы, применяющие анализ данных на практике;
4. Разбор статей на тему анализа данных;
5. Бонусы за участие в хакатонах, соревнованиях по анализу данных и прочую активность;



Отбор на DS-поток

Что будет учитываться?

1. Необходимое условие:

оценка не менее отл(8) по первой части курса
"Введение в анализ данных" и не менее хор(7) по второй части.

2. Работа в семестре по курсу, грамотное оформление ДЗ.

3. Оценка по теории вер., в меньшей степень — другие предметы.

Что нужно делать для отбора?

1. Трудиться в течение семестра.

2. В июне подать заявку.

3. Ждать. Результаты летом.

DS-поток адаптирован для ПМИ. Студенты КТ и ИВТ могут попасть на DS-поток, но возможна доп. нагрузка и проблемы с расписанием.



Куда пойти?

2 курс

Введение в анализ данных

3-4 курсы

DS-поток

Кафедра
анализа данных

Школа анализа
данных (ШАД)

1. Если анализ данных интересен, то хорошее решение:
DS-поток + кафедра анализа данных.
2. Если выбираете кафедру анализа данных,
то кафедра рекомендует пойти на DS-поток.



Что такое анализ данных?



Кому нужен анализ данных

1. *"Я математик, практическое применение не интересует".*

Скорее всего АД не нужен,
но часто математики им начинают интересоваться.

2. *"Я математик, но хочу применять свои знания на практике".*

АД для вас, ждем вас на DS-потоке

3. *"Я программист, и хочу писать только код".*

Скорее всего АД в подробностях не нужен,
но стоит понимать, чем занимаются коллеги-аналитики.

4. *"Я программист, но хочу глубоко разбираться в тонкостях математических методов".*

АД для вас, ждем вас на DS-потоке



Так что, анализ данных
это математика
или программирование?

Давайте разбираться...



Посмотрим на лекции по статистике

Статистика, прикладной поток 12. Контроль FWER и FDR. Критерии согласия

⑤ Метод Кэрри
 Проверка гипотезы с $\alpha = \frac{\alpha}{m} = \frac{\alpha}{m \cdot 2}$.
 Тогда: Если $\forall i: P(X_i) \sim U(0, 1)$,
 то $FWER(P) \leq \alpha$ в.р.

⑥ Проверка $m=2$ $[d_1, d_2]$
 1. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ против
 $H_1: \mu_1 > \mu_2$
 $P(X_1 > c) < \{P(X_1 < c) \mid U(0, 1/2)\}$.
 $FWER = P(X_1 > c) + P(X_2 > c) = 2 \cdot \alpha/2 = \alpha$.
 2. $H_0: \mu_1 = \mu_2$ и $H_1: \mu_1 < \mu_2$
 $\{c < 0\} \mid P(X_1 < c) \Rightarrow FWER = P(X_1 < c) = \alpha$.

⑦ Метод Бен-Джарни
 в.р. $FWER(P) = P$
 $\sum_{j \in S_P} P(X_j \in S) \leq \alpha$

Скорректированные
 P_0 - p-value
 P_j - cutoff

Статистика, прикладной поток 13. разное. Практическая значимость. Множественная проверка

Критерии (напоминание)

Часто критерий имеет вид $S = \{T(X) \geq c_\alpha\}$,
 где $T(X)$ — статистика критерия.

α выбирается **ДО** эксперимента,
 c_α вычисляется из условия $P_0(T(X) > c_\alpha) \leq \alpha$.

$S = \{T(X) > c_\alpha\}$ $S = \{T(X) < c_\alpha\}$ $S = \{|T(X)| > c_\alpha\}$

Статистика, прикладной поток 9. бутстреп. Аддитивные оценки дисперсии. Проверка статистических гипотез

Метод бутстреп

Этап 2.
 Процедуру генерации выборки повторить B раз:
 $X_b^* = (X_{b1}^*, \dots, X_{bn}^*)$, где $1 \leq b \leq B$.
 Далее по каждой выборке посчитаем значение статистики T ,
 получив выборку значений $T_1^* = T(X_1^*), \dots, T_B^* = T(X_B^*)$.

Этап 3.
 Полученную выборку использовать для аппроксимации значения
 оценки, которая называется бутстрепной оценкой.
 Например, бутстрепная оценка дисперсии имеет вид

$$\hat{V}_{boot} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b^{*2} - \left(\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B T_b^* \right)^2$$

Статистика, прикладной поток 15. Оптимальные оценки. Эквивариантные оценки. Доказательства теорем

Тогда $\hat{F}_n(x) - F(x) \leq \hat{F}_n(U_{(1)} - 0) - F(U_{(1)}) =$
 $= \hat{F}_n(U_{(1)} - 0) - F(U_{(1)} - 0) + \underbrace{F(U_{(1)} - 0) - F(U_{(1)})}_{\leq \frac{1}{N}}$
 $\leq \hat{F}_n(U_{(1)} - 0) - F(U_{(1)} - 0) + \frac{1}{N}$
 Аналогично
 $\hat{F}_n(x) - F(x) \geq \hat{F}_n(U_{(N)} - 1) - F(U_{(N)} - 1) =$
 $= \hat{F}_n(U_{(N)} - 1) - F(U_{(N)} - 1) + \underbrace{F(U_{(N)} - 1) - F(U_{(N)})}_{\geq -\frac{1}{N}}$
 $\geq \hat{F}_n(U_{(N)} - 1) - F(U_{(N)} - 1) - \frac{1}{N}$
 Пусть x — промежуточный
 $| \hat{F}_n(x) - F(x) |$



Посмотрим на научные статьи

McInnes, L, Healy, J, *UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction*, ArXiv e-prints 1802.03426, 2018

The choice of non-expansive maps in Definition 2 is due to Spivak, note that it closely mirrors the work of Carlsson and Memoli in [10]. The logical methods for clustering as applied to finite metric spaces. The significant since pure isometries are too strict and do not provide la Hom-sets.

In [13] Spivak constructs a pair of adjoint functors, Real and Sing, between the categories **sFuzz** and **EPMet**. These functors are the natural embedding of the classical realization and singular set functors from algebraic topology. Real is defined in terms of standard fuzzy simplices $\Delta_{\leq a}^n$ as

$$\text{Real}(\Delta_{\leq a}^n) \triangleq \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = -\log(a), t_i \geq 0 \right\}$$

similarly to the classical realization functor $|\cdot|$. The metric on $\text{Real}(\Delta_{\leq a}^n)$ is simply inherited from $\mathbb{R}^{n+1}$. A morphism $\Delta_{\leq a}^n \rightarrow \Delta_{\leq b}^m$ exists only if $a \leq b$ and is determined by a Δ morphism $\sigma : [n] \rightarrow [m]$. The action of Real on morphisms is given by the map

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{\log(b)}{\log(a)} \left(\sum_{i_0 \in \sigma^{-1}(0)} x_{i_0}, \sum_{i_1 \in \sigma^{-1}(1)} x_{i_1}, \dots, \sum_{i_m \in \sigma^{-1}(m)} x_{i_m} \right).$$

Such a map is clearly non-expansive since $0 \leq a \leq b \leq 1$ implies that $\log(b)/\log(a) \leq 1$.

We then extend this to a general simplicial set X via colimits, defining

$$\text{Real}(X) \triangleq \text{colim}_{\Delta_{\leq a}^n \rightarrow X} \text{Real}(\Delta_{\leq a}^n).$$

Since the functor Real preserves colimits, it follows that there exists a right adjoint functor. Again, analogously to the classical case, we find the right adjoint denoted Sing, is defined for an extended pseudo metric space Y in terms of its action on the category $\Delta \times I$:

$$\text{Sing}(Y) : ([n], [0, a]) \mapsto \text{hom}_{\text{EPMet}}(\text{Real}(\Delta_{\leq a}^n), Y).$$

For our case we are only interested in finite metric spaces. To correspond with this we consider the subcategory of bounded fuzzy simplicial sets **Fin-sFuzz**. We therefore use the subcategory of bounded fuzzy simplicial sets **FinReal** and **FinSing**. Formally we define the finite fuzzy realization functor as follows:

Algorithm 2 Constructing a local fuzzy simplicial set

```
function LOCALFUZZYSIMPLICIALSET( $X, x, n$ )
  knn, knn-dists  $\leftarrow$  APPROXNEARESTNEIGHBORS( $X, x, n$ )
   $\rho \leftarrow$  knn-dists[1]  $\triangleright$  Distance to nearest neighbor
   $\sigma \leftarrow$  SMOOTHKNNDIST(knn-dists,  $n, \rho$ )  $\triangleright$  Smooth approximator to knn-distance
  knn-distance
  fs-set0  $\leftarrow X$ 
  fs-set1  $\leftarrow \{([x, y], 0) \mid y \in X\}$ 
  for all  $y \in$  knn do
     $d_{x,y} \leftarrow \max\{0, \text{dist}(x, y) - \rho\}/\sigma$ 
    fs-set1  $\leftarrow$  fs-set1  $\cup \{([x, y], \exp(-d_{x,y}))\}$ 
  return fs-set
```

Algorithm 3 Compute the normalizing factor for distances σ

```
function SMOOTHKNNDIST(knn-dists,  $n, \rho$ )
  Binary search for  $\sigma$  such that  $\sum_{i=1}^n \exp(-(\text{knn-dists}_i - \rho)/\sigma) = \log_2(n)$ 
  return  $\sigma$ 
```

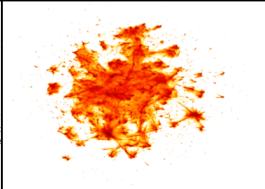


Figure 8: Visualization of the full 3 million word vectors from the GoogleNews dataset as embedded by UMAP.

is contained in U , then g is constant in B and hence $\sqrt{\det(g)}$ is constant and can be brought outside the integral. Thus, the volume of B is

$$\sqrt{\det(g)} \int_B dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{\det(g)} \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2 + 1)},$$

where r is the radius of the ball in the ambient $\mathbb{R}^n$. If we fix the volume of the ball to be $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ we arrive at the requirement that

$$\det(g) = \frac{1}{r^{2n}}.$$

since g is assumed to be diagonal with constant entries we can solve for g as

$$g_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{r^2} & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

the geodesic distance on $\mathcal{M}$ under g from p to q (where $p, q \in B$) is defined as

$$\inf_{c \in C} \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} dt,$$

where C is the class of smooth curves c on $\mathcal{M}$ such that $c(a) = p$ and $c(b) = q$, and $\dot{c}$ denotes the first derivative of c on $\mathcal{M}$. Given that g is as defined in (2) we see that this can be simplified to

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \inf_{c \in C} \int_a^b \sqrt{\dot{c}(t), \dot{c}(t)} dt \\ &= \frac{1}{r} \inf_{c \in C} \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \\ &= \frac{1}{r} d_{\mathbb{R}^n}(p, q). \end{aligned} \quad (3)$$

□

B Proof that FinReal and FinSing are adjoint

Theorem 2. The functors $\text{FinReal} : \text{Fin-sFuzz} \rightarrow \text{FinEPMet}$ and $\text{FinSing} : \text{FinEPMet} \rightarrow \text{Fin-sFuzz}$ form an adjunction with FinReal the left adjoint and FinSing the right adjoint.



Посмотрим на научные статьи

Diederik P Kingma, Max Welling: *Auto-Encoding Variational Bayes*,
ArXiv 1312.6114, 2014

2.2 The variational bound

The marginal likelihood is composed of a sum over the marginal likelihoods of individual datapoints $\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}) = \sum_{i=1}^N \log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)})$, which can each be rewritten as:

$$\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) = D_{KL}(q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})||p_{\theta}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})) + \mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) \quad (1)$$

The first RHS term is the KL divergence of the approximate from the true posterior. Since this KL-divergence is non-negative, the second RHS term $\mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)})$ is called the (variational) *lower bound* on the marginal likelihood of datapoint i , and can be written as:

$$\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}) \geq \mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) = \mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})} [-\log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) + \log p_{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{z})] \quad (2)$$

which can also be written as:

$$\mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) = -D_{KL}(q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})||p_{\theta}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})) + \mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})}$$

We want to differentiate and optimize the lower bound $\mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x})$ parameters ϕ and generative parameters θ . However, the gradient is a bit problematic. The usual (naïve) Monte Carlo gradient estimator is: $\nabla_{\phi} \mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})} [f(\mathbf{z})] = \mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})} [f(\mathbf{z}) \nabla_{\phi} \log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})] \simeq \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(\mathbf{z}^{(l)}) \sim q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$. This gradient estimator exhibits very high variance and is impractical for our purposes.

2.3 The SGVB estimator and AEVB algorithm

In this section we introduce a practical estimator of the lower bound parameters. We assume an approximate posterior in the form $q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ technique can be applied to the case $q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$, i.e. where we do not use variational Bayesian method for inferring a posterior over the parameters.

Under certain mild conditions outlined in section 2.4 for a chosen approximate parameterize the random variable $\tilde{\mathbf{z}} \sim q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ using a different (an auxiliary) noise variable ϵ :

$$\tilde{\mathbf{z}} = g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x}) \quad \text{with} \quad \epsilon \sim p(\epsilon)$$

See section 2.4 for general strategies for choosing such an appropriate $g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x})$. We can now form Monte Carlo estimates of expectations $\mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})}$ as follows:

$$\mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})} [f(\mathbf{z})] = \mathbb{E}_{p(\epsilon)} [f(g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x}^{(i)}))] \simeq \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L f(g_{\phi}(\epsilon^{(l)}, \mathbf{x}^{(i)}))$$

We apply this technique to the variational lower bound (eq. (2)), yielding our generic Stochastic Gradient Variational Bayes (SGVB) estimator $\tilde{\mathcal{L}}^A(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) \simeq \mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)})$:

$$\tilde{\mathcal{L}}^A(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{z}^{(i,l)}) - \log q_{\phi}(\mathbf{z}^{(i,l)}|\mathbf{x}^{(i)})$$

$\mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x})$ is the variational lower bound of the marginal likelihood of datapoint i :

$$\mathcal{L}(\theta, \phi; \mathbf{x}^{(i)}) = \int q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) (\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}) + \log p_{\theta}(\mathbf{z}) - \log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})) d\mathbf{z} \quad (16)$$

The expectations on the RHS of eqs (14) and (16) can obviously be written as a sum of three separate expectations, of which the second and third component can sometimes be analytically solved, e.g. when both $p_{\theta}(\mathbf{x})$ and $q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ are Gaussian. For generality we will here assume that each of these expectations is intractable.

Under certain mild conditions outlined in section (see paper) for chosen approximate posteriors parameterize conditional samples $\tilde{\mathbf{z}} \sim q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ as

$$\tilde{\mathbf{z}} = g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x}) \quad \text{with} \quad \epsilon \sim p(\epsilon) \quad (17)$$

and a function $g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x})$ such that the following holds:

$$\mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})} (\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}) + \log p_{\theta}(\mathbf{z}) - \log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x})) d\mathbf{z} = \mathbb{E}_{\epsilon \sim p(\epsilon)} \left(\log p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}) + \log p_{\theta}(\mathbf{z}) - \log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \right) \Big|_{\mathbf{z}=g_{\phi}(\epsilon, \mathbf{x}^{(i)})} d\epsilon \quad (18)$$

approximate posterior $q_{\phi}(\mathbf{z})$:

$$\tilde{\theta} = h_{\phi}(\zeta) \quad \text{with} \quad \zeta \sim p(\zeta) \quad (19)$$

i.e. choose a prior $p(\zeta)$ and a function $h_{\phi}(\zeta)$ such that the following

$$\mathbb{E}_{p(\zeta)} (\log p_{\theta}(\mathbf{X}) + \log p_{\alpha}(\theta) - \log q_{\phi}(\theta)) d\theta = \mathbb{E}_{\zeta \sim p(\zeta)} (\log p_{\theta}(\mathbf{X}) + \log p_{\alpha}(\theta) - \log q_{\phi}(\theta)) \Big|_{\theta=h_{\phi}(\zeta)} d\zeta \quad (20)$$

We introduce a shorthand notation $f_{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \theta)$:

$$f_{\phi}(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + \log p_{\theta}(\mathbf{z}) - \log q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}) + \log p_{\alpha}(\theta) - \log q_{\phi}(\theta) \quad (21)$$

(18), the Monte Carlo estimate of the variational lower bound, given

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{X}) \simeq \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f_{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}, g_{\phi}(\epsilon^{(i)}, \mathbf{x}^{(i)}), h_{\phi}(\zeta^{(i)})) \quad (22)$$

where $\epsilon^{(i)} \sim p(\epsilon)$ and $\zeta^{(i)} \sim p(\zeta)$. The estimator only depends on samples from $p(\epsilon)$ and $p(\zeta)$ which are obviously not influenced by ϕ , therefore the estimator can be differentiated w.r.t. ϕ .

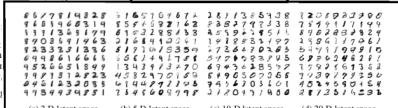
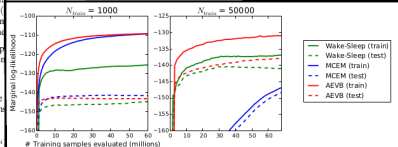


Figure 5: Random samples from learned generative models of MNIST for different dimensionalities of latent space.





Посмотрим на примере использования библиотек

Variational Autoencoders

<https://github.com/pyro-ppl/pyro/blob/dev/examples/vae/vae.py>

```

1  # Copyright (c) 2017-2019 Uber Technologies, Inc.
2  # SPDX-License-Identifier: Apache-2.0
3
4  import argparse
5
6  import numpy as np
7  import torch
8  import torch.nn as nn
9  import torchvision
10
11  import pyro
12  import pyro.distributions as dist
13  from pyro.infer import SVI, JitTrace_ELBO, Trace_ELBO
14  from pyro.optim import Adam
15  from utils.elbo_cached import MNISTCached as MNIST
16  from utils.elbo_cached import setup_data_loaders
17  from utils.vae_plots import mnist_test_tune, plot_lik, plot_vae_samp
18
19
20 # define the PyTorch module that parameterizes the
21 # diagonal gaussian distribution q(z|x)
22 class Encoder(nn.Module):
23     def __init__(self, z_dim, hidden_dim):
24         super().__init__()
25         # setup the three linear transformations used
26         self.fc1 = nn.Linear(784, hidden_dim)
27         self.fc21 = nn.Linear(hidden_dim, z_dim)
28         self.fc22 = nn.Linear(hidden_dim, z_dim)
29         # setup the non-linearities
30         self.softplus = nn.Softplus()
31
32     def forward(self, x):
33         # define the forward computation on the image x
34         # first shape the mini-batch to have pixels in the rightmost
35         x = x.reshape(-1, 784)
36         # then compute the hidden units
37         hidden = self.softplus(self.fc1(x))
38         # then return a mean vector and a (positive) square root cov
39         # each of size batch_size x z_dim
40         z_loc = self.fc21(hidden)
41         z_scale = torch.exp(self.fc22(hidden))
42         return z_loc, z_scale
43
44
45 # define the PyTorch module that parameterizes the
46 # observation likelihood p(x|z)
47 class Decoder(nn.Module):
48     def __init__(self, z_dim, hidden_dim):
49         super().__init__()
50         # setup the two linear transformations used
51         self.fc1 = nn.Linear(z_dim, hidden_dim)
52         self.fc21 = nn.Linear(hidden_dim, 784)
53         # setup the non-linearities
54         self.softplus = nn.Softplus()
55
56     def forward(self, z):
57         # define the forward computation on the latent z
58         # first compute the hidden units
59         hidden = self.softplus(self.fc1(z))
60         # return the parameter for the output Bernoulli
61         # each is of size batch_size x 784
62         loc_img = torch.sigmoid(self.fc21(hidden))
63         return loc_img
64
65
66 # define a PyTorch module for the VAE
67 class VAE(nn.Module):
68     def __init__(self, z_dim=50, use_cuda=False):
69         # by default our latent space is 50-dimensional
70         # and we use 400 hidden units
71         super().__init__()
72         # create the encoder and decoder networks
73         self.encoder = Encoder(z_dim, hidden_dim)
74         self.decoder = Decoder(z_dim, hidden_dim)
75
76     if use_cuda:
77         # calling cuda() here will put all the parameters of
78         # the encoder and decoder networks into gpu memory
79         self.cuda()
80         self.use_cuda = use_cuda
81         self.z_dim = z_dim
82
83     def model(self, x):
84         # register PyTorch module 'decoder' with Pyro
85         pyro.module("decoder", self.decoder)
86         with pyro.plates("data", x.shape[0]):
87             # setup hyperparameters for prior p(z)
88             z_loc = torch.zeros(x.shape[0], self.z_dim, dtype=x.dtype, dev
89             z_scale = torch.ones(x.shape[0], self.z_dim, dtype=x.dtype, de
90             # sample from prior (value will be sampled by guide when compo
91
92
93     # decode the latent code z
94     loc_img = self.decoder.forward(z)
95     # score against actual images
96     pyro.sample("obs", dist.Bernoulli(loc_img).to_event(1), obs=x)
97     # return the loc so we can visualize it later
98     return loc_img
99
100
101 # define the guide (i.e. variational distribution) q(z|x)
102 def guide(self, x):
103     # register PyTorch module 'encoder' with Pyro
104     pyro.module("encoder", self.encoder)
105     with pyro.plates("data", x.shape[0]):
106         # use the encoder to get the parameters used to define q(z|x)
107         z_loc, z_scale = self.encoder.forward(x)
108         # sample the latent code z
109         pyro.sample("latent", dist.Normal(z_loc, z_scale).to_event(1))
110
111
112 # define a helper function for reconstructing images
113 def reconstruct_img(self, x):
114     # encode image x
115     z_loc, z_scale = self.encoder(x)
116     # sample in latent space
117     z = dist.Normal(z_loc, z_scale).sample()
118     # decode the image (note we don't sample in image space)
119     loc_img = self.decoder(z)
120     return loc_img
121
122
123 def main(args):
124     # clear param store
125     pyro.clear_param_store()
126
127     # setup MNIST data loaders
128     # train_loader, test_loader = setup_data_loaders(MNIST, use_cuda=args.c
129
130     # setup the VAE
131     vae = VAE(use_cuda=args.cuda)
132
133     # setup the optimizer
134     adam_args = {"lr": args.learning_rate}
135     optimizer = Adam(adam_args)
136
137     # setup the inference algorithm
138     elbo = JitTrace_ELBO() if args.jit else Trace_ELBO()
139     svi = SVI(vae.model, vae.guide, optimizer, loss=elbo)
140
141
142 # setup visdom for visualization
143 if args.visdom_flag:
144     vis = visdom.Visdom()
145
146     train_elbo = []
147     test_elbo = []
148     # training loop
149     for epoch in range(args.num_eg
150         # initialize loss accumu
151         epoch_loss = 0.
152         # do a training epoch over
153         # by the data loader
154         for x, _ in train_loader:
155             # if on GPU put mini
156             if args.cuda:
157                 x = x.cuda()
158             # do ELBO gradient asc
159             epoch_loss += svi.step
160
161         # report training diagnost
162         normalizer_train = len(trn
163         epoch_loss_train = e
164         train_elbo.append(total_ave
165         print("epoch %3d) avera
166
167     if epoch % args.test_freq:
168         # initialize loss accu
169         test_loss = 0.
170         # compute the loss ov
171         for i, (x, _) in enumerate
172             # if on GPU put st
173             if args.cuda:
174                 x = x.cuda()
175             # compute ELBO est
176             test_loss += svi.e
177
178         # pick three rand
179         # visualize how h
180         if i == 0:
181             if args.visdom
182                 plot_vae.s
183                 reco_inde
184                 for index
185                     test_i
186                     reco_i
187                     vis.jp
188

```



Какие вообще инструменты могут потребоваться



NumPy



SciPy



pandas



matplotlib



PyTorch



Yandex
CatBoost



Numba



plotly



Вывод:
и математика
и программирование



Анализ данных это

процесс поиска закономерностей
в данных при помощи

- ▶ средств визуализации данных,
- ▶ математических методов,
- ▶ программных алгоритмов.



Искусственный интеллект

Отличительная особенность:

нет четко зафиксированного ответа на каждый входящий объект.

Что можно считать:

Анализ данных — основы и терминология

<https://habr.com/ru/post/352812/>

Всё, что вам нужно знать об ИИ — за несколько минут

<https://habr.com/ru/post/416889/>



Сравним задачи

Алгоритмы и структуры данных

Задача: дан массив x , нужно его отсортировать.

Ровно один правильный ответ, можно получить с помощью четких алгоритмов.

Комбинаторика

Задача: Сколько имеется способов раздать 11 разных цветков, трём девушкам: какой-то – 5, а остальным – по 3 цветка? [ОКТЧ 2019]

Ровно один правильный ответ.

Анализ данных

Задача: Имеются данные $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Восстановите по ним функцию $f : x \mapsto y$.

Особенности: нет четкого ответа, требуется только приближение, но есть критерии качества.



Пример — распознавание рукописных цифр

Вход: 

Ожидается на выходе: 5

Но как четко алгоритмически определить границу между 6 и 8?



— 2 или 9?



— 4 или 7?



Актуальность в научной среде

Число статей по запросам в Google Scholar с 2016:

- ▶ *statistics* $\approx 2\,010\,000$ статей
- ▶ *machine learning* $\approx 1\,360\,000$ статей
- ▶ *artificial intelligence* $\approx 595\,000$ статей
- ▶ *neural network* $\approx 970\,000$ статей
- ▶ *computer vision* $\approx 854\,000$ статей

- ▶ статистика $\approx 60\,200$ статей
- ▶ машинное обучение $\approx 15\,200$ статей
- ▶ искусственный интеллект $\approx 16\,600$ статей
- ▶ нейронные сети $\approx 16\,700$ статей
- ▶ компьютерное зрение $\approx 12\,300$ статей



Обзор задач анализа данных

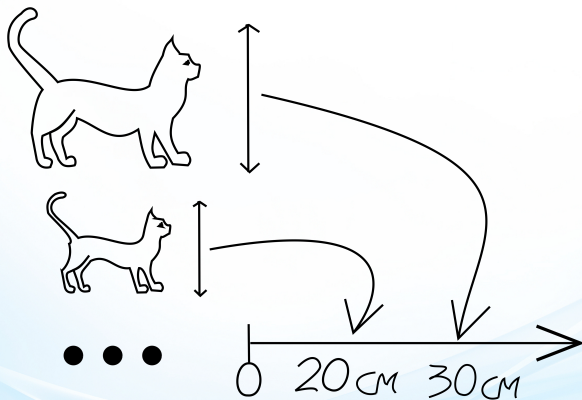


Мурмурландия

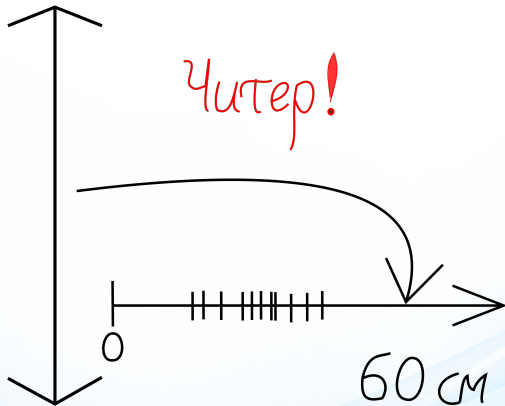




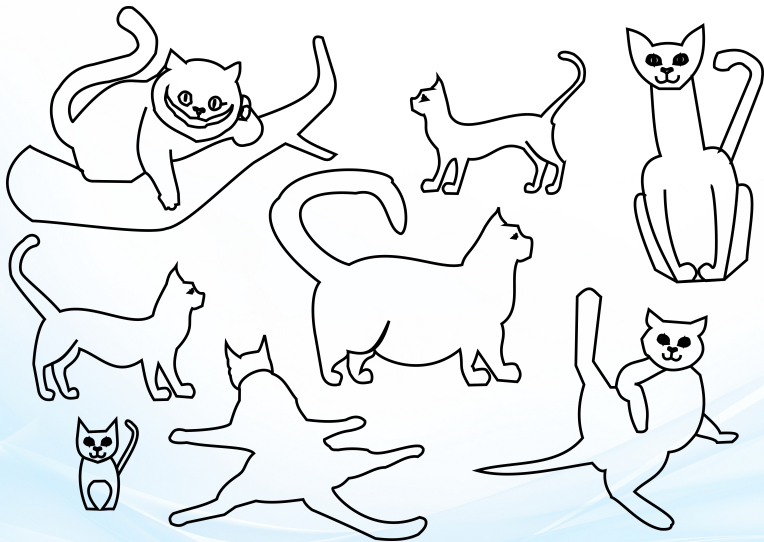
Каков средний рост котиков?



Точечное оценивание

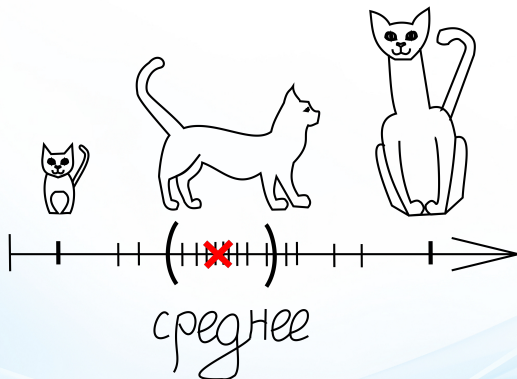


Выбросы





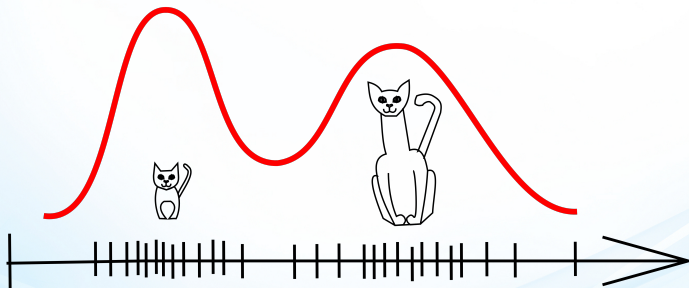
Среднее определяется неточно



Интервальное оценивание



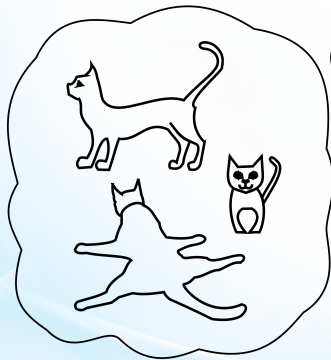
Характер распределения



Непараметрическое оценивание



низкие



высокие

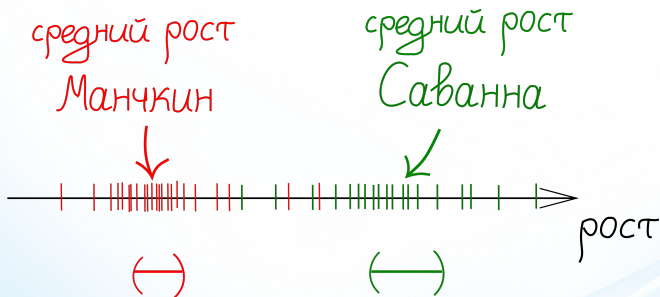




Отличается ли их средний рост?

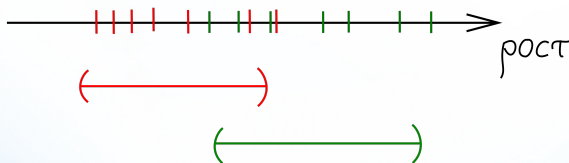


Собираем данные



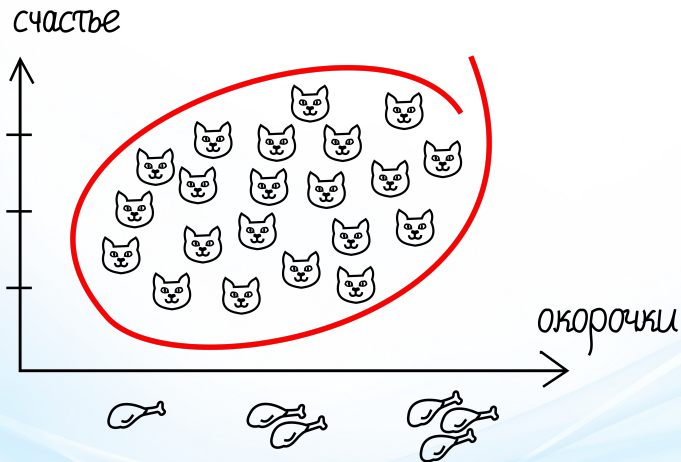
отличается

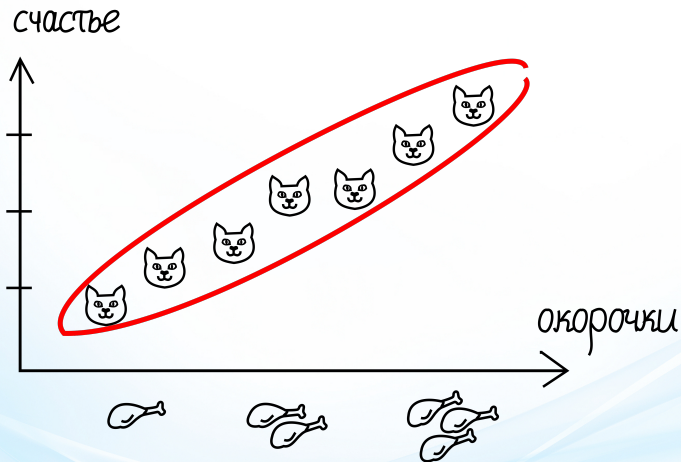
Если данных мало

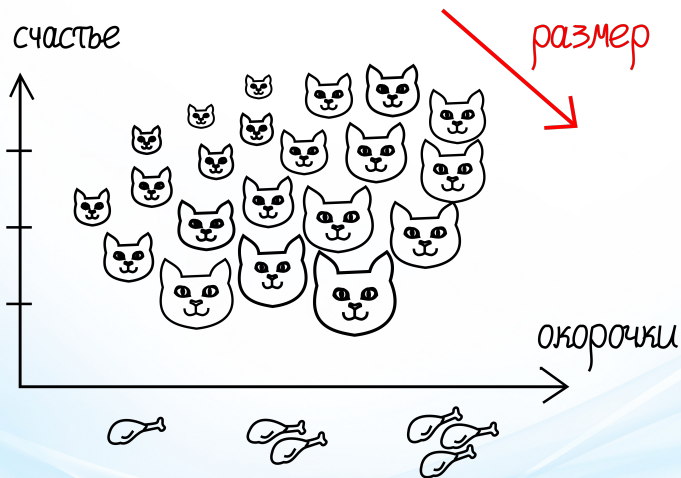


непонятно

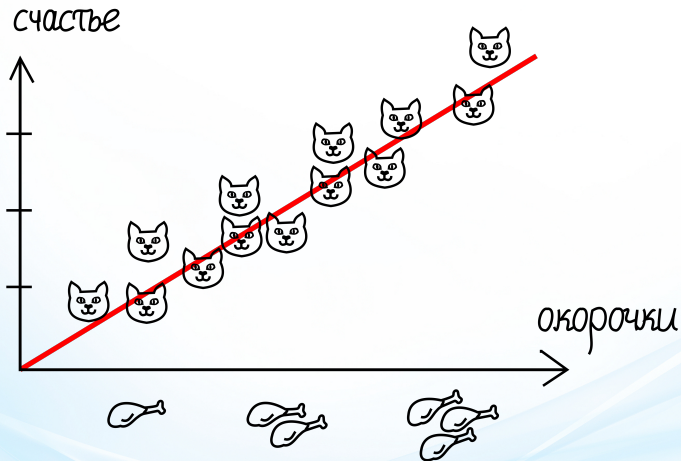
Статистические гипотезы, АВ-тесты







Корреляционный анализ





Формула счастья


$$= \theta_0 + \theta_1 \times \text{кол-во} \begin{array}{c} \text{курицы} \end{array} + \text{погрешности}$$



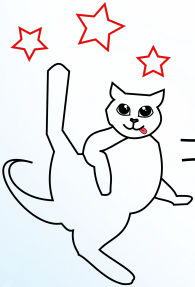
Больше окорочков

счастье





Формула счастья


$$= \theta_0 + \theta_1 \times \text{кол-во} - \theta_2 \times (\text{кол-во})^2 + \text{погрешности}$$



Другие факторы

$$= \theta_0 + \theta_1 \times \text{chicken} - \theta_2 \times (\text{chicken})^2$$

$$+ \theta_3 \times \text{ball}$$

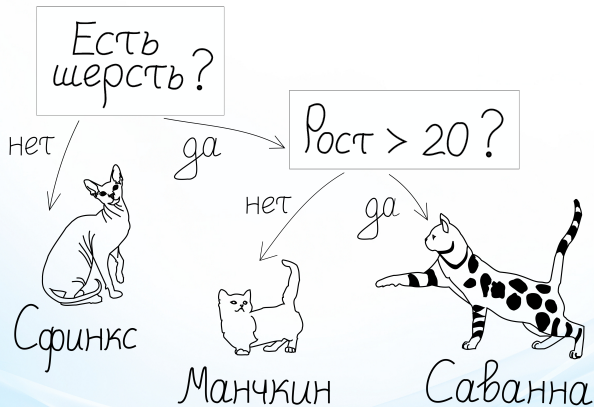
$$+ \theta_4 \times \text{sofa}$$

+ погрешности

Регрессионный анализ



Классификация котиков



Классификация

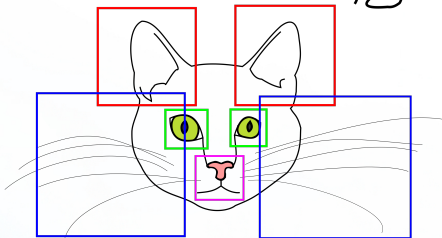


Собираем данные

котик	порода	рост	шерсть
	Саванна	50 см	да
	Сфинкс	30 см	нет
	Манчкин	15 см	да
	Саванна	40 см	да



Распознавание мордочек



Нейронные сети



Художник курса



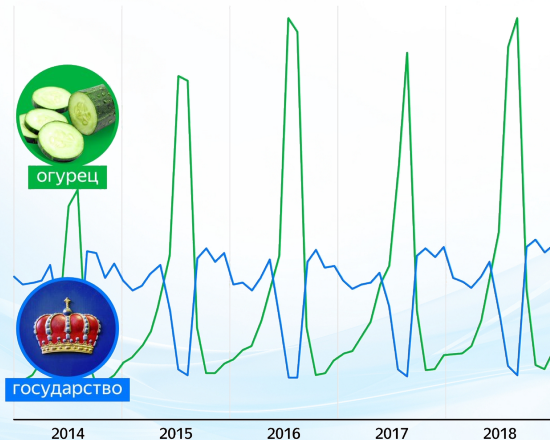
Евгений



Книга с похожим содержанием



Когда в Поиске растёт интерес
к **огурцам**, снижается доля запросов
со словом **государство**

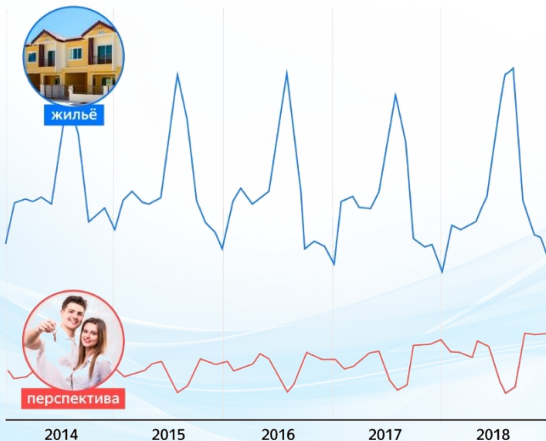




Когда в Поиске растёт интерес к **тату**,
снижается доля запросов со словом **СМЫСЛ**



Когда в Поиске растёт интерес
к **жилью**, снижается доля запросов
со словом **перспектива**





Президентские выборы в США в 1948 г.

Гарри Труман (демократы) vs. Томас Дьюи (республиканцы)

В ночь на оглашение результатов газета Chicago Tribune опубликовала заголовок: **DEWEY DEFEATS TRUMAN**



После закрытия участков газета провела опрос, обзвонив большое число избирателей, все предвещало оглушительную победу Дьюи.



Президентские выборы в США в 1948 г.

Смеющийся Труман, победитель выборов 1948 года.



Что же пошло не так?

В 1948 году телефон был доступен только людям определенного достатка и редко встречался у людей с небольшим заработком.

Выборка не учитывала достаточно широкий пласт избирателей Трумана, т.к. как правило демократы имеют большую долю голосов среди бедного населения, которым телефон в свою очередь был недоступен.



Примеры прикладных задач

Рекомендательная система

Продуктовая аналитика

Синтез речи

Где еще?



Рекомендательная система

Постановка задачи:

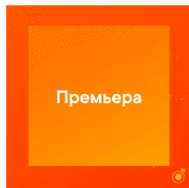
Спроектировать рекомендательную систему для муз. сайта.

Система должна рекомендовать музыку каждому пользователю в соответствии с его предпочтениями.

Данные:

- ▶ оценки пользователей различным трекам;
- ▶ прослушивание треков пользователями.

The screenshot shows the Yandex Music interface for the artist David Guetta. At the top, there's a search bar and navigation links for 'Главное', 'Подкасты', 'Жанры', and 'Радио'. The artist's profile includes a circular photo of David Guetta, his name, and a list of fans: Avicii, Rihanna, Calvin Harris. Below this are buttons for 'Слушать' (Listen), a heart icon with '2 577 575' likes, a share icon, and a 'Радио' (Radio) button. A horizontal menu at the bottom of the profile section includes 'ГЛАВНОЕ' (selected), 'ТРЕКИ', 'АЛЬБОМЫ', 'КЛИПЫ', 'ПОХОЖИЕ', and 'ИНФО'. Under 'Популярные треки' (Popular tracks), two tracks are listed: 'Memories' (2021 Remix; feat. Kid Cudi — David Guetta, K...) with a heart icon and a duration of 2:42, and 'Let's Love — David Guetta, Sia' with a heart icon and a duration of 3:20. A 'Недавний релиз' (Recent release) section shows an album cover for 'SIA & DAVID GUETTA - TALK A TALK TALKIN' SPACE'.



Премьера

Только новинки, подобранные по вашим предпочтениям

Обновлён 7 февраля



Рекомендательная система

Пусть U — множество треков, I — множество пользователей.

$R = (r_{ui})_{u \in U, i \in I}$ — матрица лайков/прослуш. пользователями треков.

Идея: T — небольшое множество интересов.

$P = (p_{tu})_{t \in T, u \in U}$ — матрица интересов пользователей.

$Q = (q_{ti})_{t \in T, i \in I}$ — матрица соответствия треков интересам.

Если величины p_{tu} и q_{ti} неотрицательны, то их можно нормировать по темам, получив вероятности:

- ▶ $p_{tu} / \sum_{t \in T} p_{tu} = P(\text{пользователю } u \text{ интересно } t),$
- ▶ $q_{ti} / \sum_{t \in T} q_{ti} = P(\text{трек } i \text{ соответствует } t).$



Рекомендательная система

Неотрицательные матричные разложения

Решаем поочередно для каждой t .

$$\begin{cases} \|R_t - p_t^T q_t\|^2 \longrightarrow \min_{p_t} \\ p_t \geq 0 \end{cases} \implies p_t = \left(\frac{q_t R_t^T}{q_t q_t^T} \right)^+$$

$$\begin{cases} \|R_t - p_t^T q_t\|^2 \longrightarrow \min_{q_t} \\ q_t \geq 0 \end{cases} \implies q_t = \left(\frac{p_t R_t^T}{p_t p_t^T} \right)^+$$

Что нужно помнить при реализации

- ▶ Пользователей и треков миллионы;
- ▶ Матрица R сильно разрежена — лайков очень малая доля.



Примеры прикладных задач

Рекомендательная система

Продуктовая аналитика

Синтез речи

Где еще?

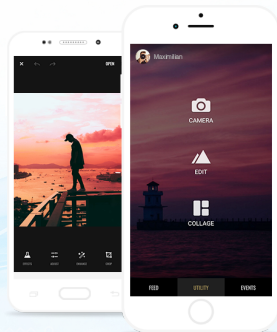


Продуктовая аналитика

Представьте, что вы продуктовый аналитик в фоторедакторе.
Вы всегда хотите, чтобы продукт приносил больше денег.

Реальный вопрос:

пользователи какой страны платят больше?





Продуктовая аналитика

Постановка задачи:

Оказывает ли страна пользователя влияние на его LifeTime Value?

LifeTime Value — доход, который принес пользователь за все время жизни в продукте.

Данные:

- ▶ страна пользователя — фактор;
- ▶ LifeTime Value каждого пользователя.



Продуктовая аналитика

Решение задачи:

Однофакторный дисперсионный анализ и Post-Hoc анализ.

Данные методы помогают понять какие значения фактора влияют на исследуемую величину и как именно.

Т.е., можно узнать, пользователи каких стран платят больше.

Как же выглядят эти методы?



Однофакторный дисперсионный анализ

Независимые выборки

1	2	...	k
X_{11}	X_{12}	...	X_{1k}
X_{21}	X_{22}	...	X_{2k}
...	...	...	...
$X_{n_1 1}$	$X_{n_2 2}$	...	$X_{n_k k}$

$X_{ij} = \overbrace{\mu + \beta_j}^{\mu_j} + \varepsilon_{ij},$
 $i = 1, \dots, n_j$ — номер наблюдения в выборке
 $j = 1, \dots, k$ — номер выборки
 μ — неизвестное общее среднее
 β_j — неизвестный эффект воздействия фактора для j -й выборки
 ε_{ij} — случайная ошибка

Предположение:

ε_{ij} независимы и имеют одинаковое непрерывное распределение.

$H_0: \mu_1 = \dots = \mu_k$ vs. $H_1: \exists j_1, j_2$ т.ч. $\mu_{j_1} \neq \mu_{j_2}$

Оценка контраста

Пусть H_{rs} отвергается $\Rightarrow$ оцениваем контраст $\Delta_{rs} = \mu_r - \mu_s$.

$V_{rs} = \text{med}\{X_{ir} - X_{is}, i = 1..n_r, j = 1..n_s\}$ — первичная оценка

$W_r = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^k n_s V_{rs}$, где $V_{rr} = 0$

$\hat{\Delta} = W_r - W_s$ — уточненная оценка контраста

Свойства:

1. Первичные оценки могут быть несогласованными: $V_{12} \neq V_{13} + V_{32}$
2. Уточненные оценки согласованы и состоятельны.
3. Уточненные оценки зависят от всех выборок.

Для применения данных методов нужно знать
теорию вероятностей и математическую статистику.



Результат

Теперь мы знаем, в какой стране завести маркетинговую кампанию!

Мы принесли компании деньги, мы молодцы!





Примеры прикладных задач

Рекомендательная система

Продуктовая аналитика

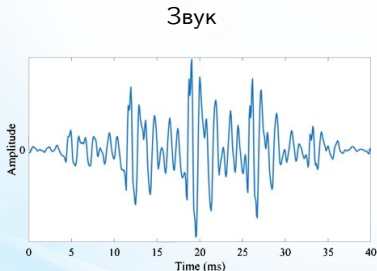
Синтез речи

Где еще?



Синтез речи

Что такое звук?



Звук — композиция волн с разными амплитудами и частотой.

Волна — периодич. ф-ия, имеющая амплитуду, период и частоту.



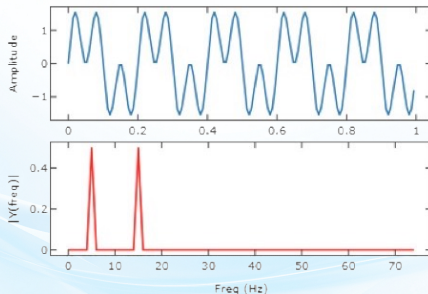
Синтез речи

Как работать со звуком?

Посмотрим на распределение частот волн в звуке.

Для этого применяется дискретное преобразование Фурье:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right]$$



Пример для звука из двух волн



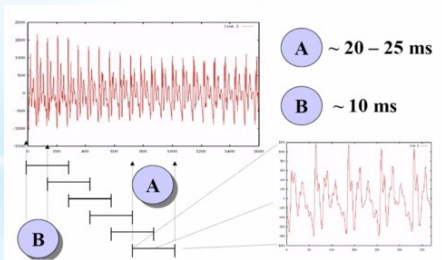
Синтез речи

Как работать со звуком?

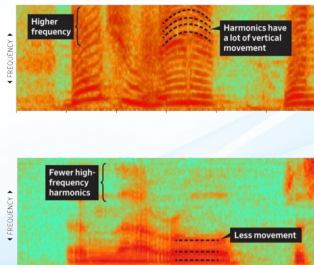
У результата преобразования Фурье ко всем данным нет времени.

Посчитаем распределение на окнах из звука.

Окна



Спектограмма



- ▶ Берем маленькие окна (20-25 мс) от исходных данных.
- ▶ К каждому окну применяем преобразования Фурье.
- ▶ Стакаем распределения частот вместе, получаем спектрограмму.



Синтез речи

Постановка задачи синтеза речи

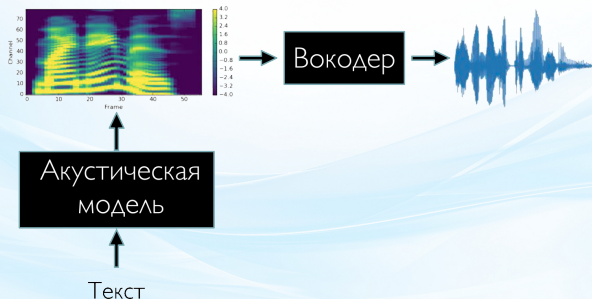
Для введенного получить соответствующее аудио.

Другие задачи, связанные со звуком:

- ▶ Определить, была ли речь на записи.
- ▶ Споттер — распознавание определенной фразы или определенного события.
Например, "Ok, Google", "Алиса" или определение выстрела.
- ▶ Идентификация говорящего или его признаков.
Например, мужчина/женщина, ребенок/взрослый.
- ▶ Распознавание речи
По аудио вернуть полную его расшифровку в виду текста.

Синтез речи

1. Акустическая модель по тексту предсказывает мел-спектограмму.
Акустическая модель — это какая-то нейросеть.
2. Вокодер по мел-спектограмме предсказывает аудио.
Вокодер может быть как алгоритмом, так и нейросетью.
Некоторые известные вокодеры используют байесовские методы.





Примеры прикладных задач

Рекомендательная система

Продуктовая аналитика

Синтез речи

Где еще?



- ▶ Беспилотные автомобили
- ▶ Ранжирование результатов в поисковой системе
- ▶ Поиск по картинкам и видео на основе содержания
- ▶ Распознавание спама/фрода
- ▶ Прогноз погоды
- ▶ Прокладывание маршрутов в навигаторах
- ▶ AI-камеры в телефонах
- ▶ Генерация картин подобно художникам
- ▶ Оплата проезда в метро взглядом
- ▶ Решение о выдаче кредита
- ▶ Персонализированная реклама
- ▶ Определение причин оттока клиентов
- ▶ Прогнозирование спроса на товар
- ▶ Определение месторасположения новой торговой точки
- ▶ Расстановка полок в магазинах
- ▶ Автоопределение свежести товаров в магазинах
- ▶ Распознавание патологий на медицинских снимках
- ▶ Персонализированная медицина
- ▶ Прогнозирование поломок оборудования
- ▶ Автоматическая система оптимального управления оборудованием



ВСЁ!